РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Численные методы

Направление подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Профиль подготовки
Прикладная информатика в экономике

Квалификация выпускника
«Бакалавр»

Разработчик:
Д.ф.-м.н., проф. Медведева Н.Б.

Оглавление

1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫЕ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Целями (целью) изучения дисциплины являются (является).

Цель:

усвоение студентами теоретических основ дискретной математики и математической логики, составляющих фундамент ряда математических дисциплин и дисциплин прикладного характера

Задачи:

обучение студентов теоретическим основам курса,

овладение методами решения практических задач

приобретение навыков самостоятельной научной деятельности.

1.1 Планируемые результаты обучения по дисциплине.

Освоение дисциплины направлено на формирование у студентов следующей компетенции:

ПК-23 – должен обладать способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.

1.2 Результаты освоения образовательной программы:

В результате изучения дисциплины студент должен:

ПК-23 – должен обладать способностью применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.

В результате освоения компетенции ПК-23 студент должен:

Знать: теоретические системные основы для формализации экономических проблемных ситуаций; принципы, методы математического моделирования; этапы формализации прикладных задач с использованием методов экономико-математического моделирования; закономерности построения, функционирования и развития систем целеобразования.

Уметь: проводить системный анализ прикладной области; применять математические методы для формализации и решения прикладных задач; строить модели экономических процессов, исследовать их и вырабатывать рекомендации по их практическому применению; использовать для анализа проблемной ситуации методы и принципы системного подхода, соответствующие методы измерений и оценки информационных ресурсов в конкретной предметной области; обрабатывать статистическую информацию.

Владеть: методами математического моделирования для формализации и решения прикладных задач.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ), СТРУКТУРИРОВАННОЕ ПО ТЕМАМ (РАЗДЕЛАМ) С УКАЗАНИЕМ ОТВЕДЕННОГО НА НИХ КОЛИЧЕСТВА АКАДЕМИЧЕСКИХ ИЛИ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ЧАСОВ И ВИДОВ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ

Содержание дисциплины (модуля)

Раздел 1. Введение в вычислительную математику

Тема 1. Элементы теории погрешностей.

Основные требования к алгоритмам вычислений. Точность, сходимость, устойчивость вычислительного процесса. Погрешность результата численного решения задачи. Структура погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности. Значащие цифры. Распространение ошибок при вычислениях Графы вычислительных процессов

Тема 2. Особенности вычислений, реализуемых на ЭВМ.

Особенности машинной арифметики. Машинные системы счисления, их основные характеристики и постоянные. Машинное округление. Устойчивость алгоритма. Вычислительная обусловленность задачи

Раздел 2. Методы обработки числовых данных.

Тема 3. Методы приближения функций.

Постановка задач о приближении функций. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона. Итерационный метод интерполяции Эйткена. Практическая оценка точности интерполяции. Интерполяция сплайнами. Построение кубического сплайна. Экстремальные и локальные свойства сплайна. Аппроксимация в среднем. Метод наименьших квадратов. Построение системы ортогональных полиномов

Тема 4. Численное дифференцирование.

Численное дифференцирование, методы построения формул (полиномиальные и неопределенных коэффициентов). Практическая оценка точности численного дифференцирования (метод Рунге – Ромберга)

Тема 5. Численное интегрирование.

Численное интегрирование. Построение формул с использованием интерполяции и метод неопределенных коэффициентов. Оценки погрешностей квадратурных формул, практическое вычисление погрешностей (метод Рунге). Влияние ошибок округления. Квадратурные формулы Гаусса

Раздел 3. Численные методы линейной алгебры

Тема 6. Решение систем линейных уравнений.

Общая характеристика методов численного решения СЛАУ. Метод исключений Гаусса и LU – разложение. Оценка ошибок округления. Метод Гаусса с частичным выбором ведущего элемента. Итерационное уточнение решения. Методы решения СЛАУ со специальными матрицами. Метод Холецкого для симметричных систем. Метод прогонки для ленточных систем. Итерационные методы решения СЛАУ. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя. Понятия о методах релаксации и методе сопряженных градиентов. Практическая оценка погрешности при использовании итерационных методов. Анализ обусловленности СЛАУ. Практическая оценка обусловленности матрицы системы. Понятие о регуляризации задачи

Тема 7. Задача на собственные значения.

Проблема собственных значений. Постановка различных задач. Оценки величины собственных значений, их локализация. Численная обусловленность задачи нахождения собственных значений и собственных векторов. Методы нахождения коэффициентов полинома. Методы Крылова и Леверрье- Фадеева. Степенной метод. Метод вращений. LU и QR методы

3. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

ТЕМА 1. ПОГРЕШНОСТИ. МАШИННАЯ АРИФМЕТИКА

Задача 1.1.

Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Найти сумму ряда аналитически.

Вычислить значения частичных сумм ряда $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях $N = 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5$.
Для каждого N вычислить величину абсолютной погрешности $\left|S(N) - S\right|$ и определить количество верных цифр в частичной сумме $S(N)$.
Представить результаты в виде гистограммы зависимости верных цифр результата от N. Сделать выводы.

N	a_n	N
1	$\dfrac{2}{n^2+5n+6}$	11

Задача 1.2

Дана функция $f(a,b,c)$. Значения переменных указаны в варианте со всеми верными цифрами. Оценить погрешность результата, используя:
оценки погрешностей для арифметических операций;
граф вычислительного процесса
Результат представить в двух формах записи: с явным указанием погрешностей и с учетом верных цифр.

№	$f(a,b,c)$	a	b	c
1	$\dfrac{a}{a^2+bc}$	0.0125	0.283	0.0187

Задача 1.3 Вычислить значение Z и оценить абсолютную и относительную погрешности результата, считая, что значения исходных данных получены в результате округления.
Записать результат с учетом погрешности.

№	Z
1	$\sin(\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{2.02} + \sqrt[4]{3.03})$

ТЕМА 2. Интерполяция и аппроксимация

Задача 2.1. Для функции, заданной таблицей необходимо:
2.1.1 построить интерполяционный многочлен Лагранжа и вычислить значение в точке X0
Используя общие формулы
Используя MS Excel

N	Таблица					$x0$
1	x	-2	-1	0	1	-1.25
	y	4	1	-2	-3	

2.1.2 найти приближенное значение $f(x0)$, используя интерполяционные многочлены Ньютона 1-ой и 2-ой степеней. Найти оценку погрешность апостериорным методом, используя MS Excel

N	$x0$	Таблица $y = f(x)$			
1	0.53	x	0.5	0.6	0.7
		y	0.461281	0.535153	0.600685
		x	0.8	0.9	
		y	0.657670	0.706241	
		x	2.8	2.9	3.0
		y	4.167403	4.270920	4.372438

Задача 2.2: Построить интерполяционный кубический сплайн для функции , заданной таблицей, и найти его значение в указанной точке.
Построить график интерполяционного сплайна и исходных точек.

Номер варианта	1
X	Y
0.25	0.7788
0.31	0.7334
0.36	0.6977

0.39	0.6771
0.43	0.6505
0.47	0.6250
0.52	0.5945

Задача 2.3:

a) Методом наименьших квадратов построить многочлены первой и второй степени, аппроксимирующий функцию, заданную таблично. Найти значение многочленов в заданных точках, абсолютную погрешность в них и среднеквадратическую погрешность, построить графики.

b) Для этой же функции построить многочлен первой степени, пользуясь встроенными функциями системы MathCAD для линейной регрессии. Графически сравнить полученные результаты.

c) Методом наименьших квадратов построить многочлены первой и второй степени, аппроксимирующий функцию, заданную таблично, использую систему ортогональных полиномов.

Номер варианта	1
X	Y
0.25	0.7788
0.31	0.7334
0.36	0.6977
0.39	0.6771
0.43	0.6505
0.47	0.6250

ТЕМА 3. Численное дифференцирование

Задача 3. Для функции, заданной таблицей необходимо найти производную в точке х

Используя MS Excel

Оценить точность полученного результата

Номер варианта	1
0.25	0.7788
0.31	0.7334
0.36	0.6977
0.39	0.6771
0.43	0.6505
0.47	0.6250
0.52	0.5945
0.56	0.5712
0.64	0.5273

0.66	0.5169
X0	0.41

ТЕМА 4. Численное интегрирование

Задача 4: Приближенное вычисление определенного интеграла с помощью квадратурных формул.

,

где

Задание:

Вычислить приближенные значения интеграла с помощью встроенной функции MathCAD'а для различных значений переменной TOL:

Вычислить значения для различных значений $n = 2k$, $k = 1,2,3$ по заданной квадратурной формуле (обобщенные формулы левых прямоугольников, правых прямоугольников, средних прямоугольников, трапеций, парабол). Оценить погрешность по методу Рунге и на основании этих величин оценить скорость сходимости.

Варианты индивидуальных заданий.

Номер варианта	f(x)	a	b	Формула
1	$\frac{1}{\sqrt{2\cdot x^2+1}}$	1	4	Левых прямоугольников

Тема 5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задача 5.1. Дана система уравнений Ax=b порядка n. Исследовать зависимость погрешности решения x от погрешностей правой части системы b.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Используя встроенную функцию lsolve(A, b) пакета MATHCAD, найти решение x системы Ax=b с помощью метода Гаусса.
2. С помощью встроенной функции condi(A) пакета MATHCAD вычислить число обусловленности матрицы A.
3. Принимая решение x, полученное в п. 1, за точное, вычислить вектор $d=(d_1,...,d_n)^T$, $d_i=\dfrac{\| x-x^i \|_\infty}{\| x \|_\infty}$, i=1, ..., n, относительных погрешностей решений x^i систем $Ax^i=b^i$, i=1, ..., n, где компоненты векторов b^i вычисляются по формулам: $b_k^i=\begin{cases} b_k+\Delta, & k=i, \\ b_k, & k\neq i, \end{cases}$ k=1, ..., n

($\Delta -$ величина погрешности, принять = 5% от bi)

4. На основе вычисленного вектора d построить гистограмму. По гистограмме определить компоненту b_m вектора b, которая оказывает наибольшее влияние на погрешность решения.
5. Оценить теоретически погрешность решения x^m по формуле: $\delta(x^m)\leq cond(A)\cdot\delta(b^m)$. Сравнить значение $\delta(x^m)$ со значением практической погрешности d_m. Объяснить полученные результаты.

УКАЗАНИЕ. Функция condi(A) возвращает число обусловленности матрицы A, основанное на ∞-норме. Для вычисления $\|\cdot\|_\infty$ вектора удобно воспользоваться встроенной функцией max(v) пакета MATHCAD, возвращающей максимальную компоненту вектора v.

Задача 5.2. Решить систему уравнений Ax=b из задачи 5.1, используя LU-разложение матрицы A.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя встроенную функцию lu(A) пакета MATHCAD, получить LU-разложение матрицы A.
2. Преобразовать вектор b по формулам прямого хода метода Гаусса. С помощью обратной подстановки найти решение системы x.

УКАЗАНИЕ. Функция lu(A) возвращает матрицу, в которой содержатся матрицы P, L и U такие, что PA=LU (P- матрица перестановок).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЗАДАЧЕ 5

Таблица к задаче 5.1

Компоненты вектора b во всех вариантах задаются формулой $b_i = N$, $\forall i = 1...n$, коэффициенты $c = c_{ij} = 0.1 \cdot N \cdot i \cdot j$, $\forall i, j = 1...n$, N - номер варианта.

N	n	a_{ij}
1	6	$\dfrac{15}{4 \cdot c^5 + 6 \cdot c + 1}$

Задача 5.3. Дана система уравнений Ax=b. Найти решение системы с помощью метода Гаусса. Выполнить 10 итераций по методу простых итераций (Зейделя). Принимая решение, полученное с помощью метода Гаусса за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Задать матрицу системы A и вектор правой части b. Используя встроенную функцию lsolve пакета MATHCAD, найти решение системы Ax=b с помощью метода Гаусса.
2. Преобразовать систему Ax=b к виду x=Bx+c, удобному для итераций. Проверить выполнение достаточного условия сходимости итерационных методов $\| B \|_\infty < 1$.
3.Выполнить 10 итераций по методу простых итераций (Зейделя); взять любое начальное приближение. Принимая решение, полученное в п. 1 за точное, найти величину абсолютной погрешности итерационного решения (использовать норму $\| \cdot \|_\infty$).
4. Взять другое начальное приближение. Объяснить полученные результаты.

Таблица к задаче 5.3

N	A					b
1	79.2	0	35	19.8	24	86
	39.6	85	0	19.8	25	55
	19.8	-15	45	0	10	77
	49.5	18	20	89.1	0	5
	9.9	15	20	-49.5	95	-64

4. ОСНОВНАЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ);

Основная литература:

№ п/п	Автор	Название	Издательство	Год	Наличие в ЭБС*
Л 1. 1	В.М. Кононов, Ю.В. Павлова	Кононов В.М. Численные методы : учеб.-метод. комплекс (Для подгот. бакалавров по направл. 080800 "Прикладная информатика")	АТиСО, УрСЭИ (фил.), Соц.-экон. фак., Каф. прикладной информатики. - М. : АТиСО,. - 53 с.	2008	
Л 1. 2.	Бахвалов, Н.С	Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков	М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, - 636 с	2012 .	: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222833
Л 1. 3.	Вержбицкий, В.М.	Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учебное пособие /	- М. : Директ-Медиа, - 400 с.	2013 .	http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=214561
Л 1. 4.	Гавришина, О.Н.	Численные методы : учебное пособие / О.Н. Гавришина, Ю.Н. Захаров, Л.Н. Фомина	- Кемерово : Кемеровский государственный университет, - 238 с	2011 .	http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232352

ЭБС – электронно - библиотечная система

Дополнительная литература:

№ п/п	Автор	Название	Издательство	Год	Наличие в ЭБС
Л 2. 1.	Самарский, А.А.	Введение в численные методы /	М.: Наука, 1987. – 288с		
	Вержбицки	Основы численных	М. :	2013	http://biblioclu

	й, В.М	методов : учебник / В.М. Вержбицкий	Директ-Медиа,. - 847 с		b.ru/index.php?page=book&id=214564
	Калиткин, Н.Н.	Численные методы	М., Наука,– 258с.	1978.	
	Бахвалов, Н.С.	Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков.	– Высшая школа – 190с	2000.	

5. РЕСУРСЫ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ "ИНТЕРНЕТ", НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

№ п/п	Интернет ресурс (адрес)	Описание ресурса
1.	www.intuit.ru/	INTUIT.ru: Интернет Университет Информационных Технологий - бесплатное дистанционное образование компьютерным дисциплинам.

6. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, НАВЫКОВ И (ИЛИ) ОПЫТА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Этап формирования компетенций в процессе изучения дисциплины характеризуется следующими типовыми контрольными заданиями

Типовые контрольные вопросы для подготовки к экзамену (зачету) при проведении промежуточной аттестации по дисциплине

1. Источники и виды погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности.
2. Интерполирование функции многочленами Лагранжа.
3. Интерполяционные формулы Ньютона.
4. Интерполирование сплайн-функциями.
5. Метод наименьших квадратов.
6. Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников.
7. Вычисление определенного интеграла по формуле трапеции.
8. Вычисление определенного интеграла по формуле Симпсона.
9. Квадратурные формулы интерполяционного типа.
10. Метод Рунге апостериорной оценки погрешности вычисления определенного интеграла.
11. Метод Гаусса вычисления определенного интеграла.
12. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
13. Решение системы линейных алгебраических уравнений специального вида методом прогонки.
14. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Якоби (простой итерации).
15. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.
16. Метод деления отрезка пополам.
17. Решение нелинейного уравнения методом простой итерации.
18. Метод Ньютона нахождения корней нелинейного уравнения.
19. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Постановка исходной задачи.
20. Построение разностной схемы для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения.
21. Разностная аппроксимация дифференциальных операторов.
22. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера.
23. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта второго порядка.
24. Общая формулировка методов Рунге-Кутта для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Семейство методов третьего и четвертого порядков.
25. Общая формулировка многошаговых методов для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
26. Метод Адамса решения задачи Коши для обыкновенного

дифференциального уравнения.
27. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Постановка задачи.
28. Метод конечных разностей для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
29. Аналитические методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
30. Методы построения конечно-разностных схем, аппроксимирующих дифференциальное уравнение в частных производных.

Критерии оценки изложены в шкале оценки для проведения промежуточной аттестации по дисциплине в п.6.2.